ỨNG DỤNG PHƯƠNG PHÁP BÌNH SAI TRUY HỒI THUẬT TOÁN T THUẬN TRONG XỬ LÝ TOÁN HỌC MẠNG LƯỚI TRẮC ĐỊA

Lương Thanh Thạch
Trường Đại học Tài nguyên và Môi trường Hà Nội

Tóm tắt

Xử lý toán học (bình sai) các mạng lưới trắc địa là nội dung cơ bản và quan trọng của công tác đo đạc và bản đồ. Để thực hiện công việc này, hiện nay có nhiều phương pháp khác nhau. Bài báo này đề cập tới sử dụng thuật toán T thuận là một trong các thuật toán bình sai truy hồi.

Từ khóa: Bình sai truy hồi; Bình sai các mạng lưới trắc địa

Abstract

Apply the T recurrent algorithm to the adjustment of geodetic networks

Geodetic networks mathematics processing (adjustment) plays an important role in surveying and mapping. A number of methods enable to solve this problem. The paper deals with the T algorithm, which belongs to recurrent adjustment methods.

Key word: Recurrent adjustment; Geodetic networks adjustment

1. Đặt vấn đề

Phương pháp bình sai truy hồi với phép biến đổi xoay Givens (thuật toán T thuận), được Hà Minh Hòa phát triển trên nền tảng của phương pháp bình sai truy hồi (thuật toán Q) do Markuze (1986) đề xuất với mục đích đưa các trị đo vào tính toán truy hồi dựa trên cơ sở sử dụng ma trận tam giác trên *T*, thêm vào đó ma trận tam giác trên *T* liên hệ với ma trận chuẩn *R* theo biểu thức $R=T^T.T$. Đặc trưng cơ bản của thuật toán *T* thuận là tính trực tiếp ma trận tam giác trên *T* từ hệ phương trình số cải chính mà không cần thông qua việc lập hệ phương trình chuẩn. Với đặc điểm nêu trên cùng với tính chất của phép biến đổi xoay Givens là phép biến đổi trực giao nên việc tích lũy sai số làm tròn trong quá trình tính toán là nhỏ bỏ qua.

Bài báo này nghiên cứu cơ sở lý thuyết và tiến hành chứng minh bằng thực nghiệm của thuật toán *T* thuận để xử lý các mạng lưới trắc địa.

2. Giải quyết vấn đề

2.1. Lý thuyết phép biến đổi xoay

Lý thuyết của phép biến đổi xoay được trình bày trong tài liệu [4]. Theo đó, giả sử trên mặt phẳng Oxy khi xoay vectơ a(x, y) đi một góc α, các tọa độ x, y của điểm a sẽ thay đổi thành (x’, y’) được tính theo các công thức:

$$\begin{aligned} x' &= x.\cos\alpha - y.\sin\alpha \\ y' &= x.\sin\alpha + y.\cos\alpha \end{aligned} \qquad (1.1)$$

chúng ta đặt ma trận:

$$H = \begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix} \qquad (1.2)$$

được gọi là ma trận xoay với góc xoay α. Ma trận *H* là ma trận vuông góc thỏa mãn tính chất:

$$H^T.H = E_{2\times2} \qquad (1.3)$$

với ma trận E_{2x2} là ma trận đơn vị 2×2.

Lúc này, bài toán đặt ra là tìm góc α sao cho tung độ y’ của vectơ a’(x’, y’) bằng 0. Phép biến đổi đưa a(x, y) về a’(x’, 0) được gọi là phép biến đổi xoay.

Từ hệ phương trình (1.1) khi đặt y'=0 chúng ta có:

$$x.\sin\alpha + y.\cos\alpha = 0 \quad (1.4)$$

Một trong các nghiệm của (1.4) có dạng:

$$\cos\alpha = \frac{x}{f}; \quad \sin\alpha = -\frac{y}{f}$$

ở đây

$$f = \sqrt{(x^2 + y^2)} \quad (1.5)$$

Phép biến đổi xoay trình bày trên được đề xuất bởi Givens (1954) để biến đổi ma trận đối xứng về dạng ma trận 3 đường chéo khi giải hệ phương trình tuyến tính với việc xác định đồng thời các giá trị riêng của ma trận nên còn được gọi là phép biến đổi xoay Givens.

Trong thực tế áp dụng phép biến đổi xoay Givens, chúng ta thay ma trận H ở dạng (1.2) bởi ma trận H ở dạng mới như sau:

$$H = \begin{bmatrix} C & -S \\ S & C \end{bmatrix}_{2\times 2} \quad (1.6)$$

và thay cho (1.5) sử dụng công thức:

$$C = \frac{x}{f}; \quad S = -\frac{y}{f} \quad (1.7)$$

Khi đó hệ (1.1) có dạng mới như sau:

$$\begin{aligned} x' &= C.x - S.y \\ y' &= S.x + C.y \end{aligned} \quad (1.8)$$

Ma trận H (1.6) thỏa mãn tính chất (1.3). Để áp dụng phép biến đổi xoay Givens trong phép biến đổi ma trận đối xứng xác định dương thành ma trận tam giác, chúng ta biểu diễn ma trận đối xứng xác định dương $\overline{R}$ dưới dạng sau:

$$\overline{R} = R + \beta.Z^T.Z \quad (1.9)$$

ở đây R – ma trận đối xứng xác định dương, Z - vectơ, β là một số dương.

Đối với ma trận đối xứng xác định dương luôn tồn tại phép khai triển tam giác duy nhất theo phương pháp Cholesky. Điều này có nghĩa chúng ta luôn có:

$$R = T^T.T; \quad \overline{R} = \overline{T}^T.\overline{T} \quad (1.10)$$

ở đây T và $\overline{T}$ là các ma trận tam giác trên.

Lưu ý (1.3) và (1.10) có thể viết lại biểu thức (1.9) dưới dạng sau:

$$\overline{R} = \left[\overline{T}^T \vdots 0\right]\begin{bmatrix} \overline{T} \\ \cdots \\ 0 \end{bmatrix} = \left[T^T \vdots \sqrt{\beta}.Z^T\right]\begin{bmatrix} T \\ \cdots \\ \sqrt{\beta}.Z \end{bmatrix} = \left[T^T \vdots \sqrt{\beta}.Z^T\right]H^T.H.\begin{bmatrix} T \\ \cdots \\ \sqrt{\beta}.Z \end{bmatrix} = B^T.H^T.H.B$$

Biểu thức trên gợi ý cho việc sử dụng ma trận xoay H để biến đổi hàng cuối cùng $\xi^{(0)} = \sqrt{\beta}.Z$ của ma trận phụ:

$$B^{(0)} = \begin{bmatrix} T \\ \cdots \\ \sqrt{\beta}.Z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} T \\ \cdots \\ \xi^{(0)} \end{bmatrix}, \quad (1.11)$$

thành hàng gồm toàn số 0. Khi đó chúng ta sẽ nhận được ma trận phụ biến đổi

$$\overline{B} = H.B^{(0)} = \begin{bmatrix} \overline{T} \\ \cdots \\ 0 \end{bmatrix} \quad (1.12)$$

với ma trận tam giác trên $\overline{T}$ nhận được thỏa mãn biểu thức $\overline{T}^T.\overline{T} = \overline{R}$.

Như vậy, phép biến đổi Givens cho phép nhận được trực tiếp ma trận tam giác trên $\overline{T}$ thay vì phải biến đổi ma trận chuẩn $\overline{R}$ theo phương pháp Choleski.

Ưu điểm của phép biến đổi xoay so với phương pháp Gauss và Cholesky trong việc giải hệ phương trình chuẩn là việc hạn chế sự tích lũy của các sai số làm tròn. Ngoài ra phép biến đổi xoay còn cho phép sử dụng kỹ thuật ma trận thưa trong quá trình bình sai mạng lưới trắc địa.

2.2. Cơ sở lý thuyết của thuật toán truy hồi T thuận

Khi ứng dụng thuật toán *T* thuận để thực hiện tính toán, chúng ta chấp nhận ma trận tam giác trên ban đầu có dạng [4]:

$$T_0 = 10^{-m}.E_{k\times k} \quad (1.13)$$

ở đây *m >> 0* - số rất lớn (số m thường nhận bằng 6); E_{kxk} - ma trận đơn vị bậc k.

Gọi R_{i-1} - ma trận chuẩn được lập bởi các phương trình số cải chính của (i – 1) trị đo đầu tiên. Đối với (i – 1) trị đo đầu tiên chúng ta có hệ phương trình chuẩn:

$$R_{i-1}.\delta X_{i-1} + b_{i-1} = 0 \quad (1.14)$$

Khi giải hệ phương trình chuẩn (1.14) theo phương pháp Choleski, chúng ta sẽ nhận được 2 phương trình biến đổi tương đương ở dạng:

$$\begin{aligned} &T_{i-1}^T.Y_{i-1} = -b_{i-1}; \\ &T_{i-1}.\delta X_{i-1} = Y_{i-1}, \end{aligned} \quad (1.15)$$

ở đây, Y_{i-1} - vectơ các số hạng tự do được biến đổi của hệ phương trình chuẩn nhận được sau khi đưa vào tính toán (i – 1) trị đo đầu tiên, T_{i-1}- ma trận tam giác trên nhận được từ phép triển khai $R_{i-1} = T_{i-1}^T.T_{i-1}$ theo phương pháp Cholesky.

Khi bình sai mạng lưới trắc địa theo thuật toán *T* thuận, chúng ta nhận được ma trận tam giác trên *T*, vectơ các số hạng tự do được biến đổi *Y* và tổng $\Phi=[PVV]$. Quá trình tính toán truy hồi trị đo thứ *i* là y_i với phương trình số hiệu chỉnh $v_i = a_i.\delta X + \lambda_i^{(0)}$, trọng số P_i, ma trận hệ số a_i; số hạng tự do $\lambda_i^{(0)} = \varphi(X_0) - y_i$; vectơ các ẩn số gần đúng $-X_0$ được thực hiện theo các nguyên tắc sau:

Nguyên tắc 1. Khi thực hiện phép biến đổi xoay Givens với ma trận phụ:

$$B = \begin{bmatrix} T_{i-1} & Y_{i-1} \\ \sqrt{P_i}.a_i & -\sqrt{P_i}.\lambda_i^{(0)} \end{bmatrix} \quad (1.16)$$

chúng ta sẽ nhận được ma trận phụ biến đổi:

$$\overline{B} = \begin{bmatrix} T_i & Y_i \\ 0 & \sqrt{\Delta\Phi_i} \end{bmatrix} \quad (1.17)$$

ở đây T_i - ma trận tam giác trên liên hệ với ma trận chuẩn $R_i = R_{i-1} + a_i^T P_i a_i$ bởi biểu thức $R_i = T_i^T.T_i$; với đại lượng:

$$\Delta\Phi_i = \Phi_i - \Phi_{i-1} = [PVV]_i - [PVV]_{i-1} = P_i.\left(\lambda_i^{(0)}\right)^2 - Y_i^T.Y_i + Y_{i-1}^T.Y_{i-1} \quad (1.18)$$

Để thực hiện bình sai truy hồi theo thuật toán *T*, ngoài ma trận ban đầu T_0 được chọn theo công thức (1.13), chúng ta nhận Y_0 là vectơ 0, vectơ hàng $\xi^{(0)} = \left(\sqrt{P_i}.a_i \quad \mathrm{M} \; \sqrt{P_i}.\lambda_i^{(0)}\right)$.

Khi đó ma trận phụ ban đầu $B^{(0)}$ có dạng:

$$B^{(0)} = \begin{bmatrix} 10^{-m}.E_{k\times k} & 0 \\ \sqrt{P_i}.a_i & -\sqrt{P_i}.\lambda_i^{(0)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \overline{T}^{(0)} \\ \xi^{(0)} \end{bmatrix}$$

Bằng cách lần lượt đưa n trị đo trong mạng lưới trắc địa vào tính toán bình sai truy hồi theo nguyên tắc trên chúng ta thực hiện xong quá trình bình sai truy hồi mạng lưới trắc địa theo phép biến đổi xoay.

Nguyên tắc 2: Nếu trị đo y_i là trị đo dư thì có thể kiểm tra sự có mặt của các trị đo thô theo số hạng tự do:

$$\lambda_i = t_i^T.Y_{i-1} + \lambda_i^{(0)} \quad (1.19)$$

trên cơ sở so sánh nó với giới hạn:

$$\left(\lambda_i\right)_{gh} = 3.\sigma_0.\sqrt{g_i} \quad (1.20)$$

ở đây vectơ t_i được xác định theo công thức:

$$T_{i-1}^T.t_i = a_i^T \quad (1.21)$$

trọng số đảo g_i của số hạng tự do λ_i được xác định theo công thức:

$$g_i = P_i^{-1} + t_i^T.t_i \qquad (1.22)$$

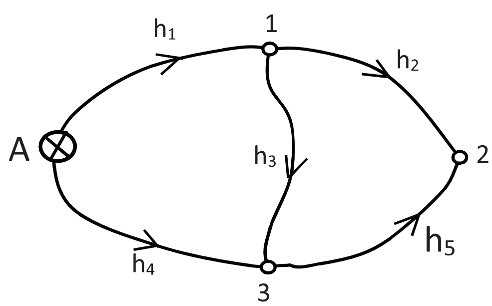
Trọng số đảo g_i của số hạng tự do λ_i dựa trên phương pháp bình sai truy hồi có dạng:

$$g_i = P_i^{-1} + a_i.Q_{i-1}.a_i^T$$

Lưu ý $Q_{i-1} = R_{i-1}^{-1} = T_{i-1}^{-1}.T_{i-1}^{-T}$ và biểu thức (1.21), từ biểu thức trên suy ra công thức (1.22).

Nguyên tắc vừa xem xét ở trên là cơ sở của việc kiểm tra sự có mặt của các trị đo thô trong quá trình bình sai truy hồi theo thuật toán T thuận.

3. Thực nghiệm



Hình 1: Sơ đồ lưới độ cao trắc địa dùng tính toán thực nghiệm

Để luận chứng cho cơ sở lý thuyết bài toán trên, tiến hành tính toán thực nghiệm một mạng lưới độ cao trắc địa sau [1]:

Cho lưới độ cao như sau:

Số liệu gốc: $H_A = 12.000$ m

Số liệu đo được cho ở bảng 1 sau:

Bảng 1. Thông tin số liệu đo

STT	Chênh cao đo h_i (m)	Số trạm máy đo n_i
1	+1.935	15
2	+5.351	30
3	+2.921	10
4	+4.853	10
5	+2.432	25

3.1. Thực nghiệm bình sai truy hồi

Tính độ cao gần đúng của các điểm 1, 2, 3:

$H^0_1 = H_A + h_1 = 13.935$ m

$H^0_2 = H_A + h_1 + h_2 = 19.286$ m

$H^0_3 = H_A + h_4 = 16.853$ m

Hệ số phương trình số cải chính, trọng số, số hạng tự do được thống kê ở bảng 2 sau:

Bảng 2. Các hệ số, trọng số và số hạng tự do của hệ phương chỉnh số hiệu chỉnh

STT	dH_1	dH_2	dH_3	Trọng số $p_i = \frac{30}{n_i}$	Số hạng tự do λ_i(m)
1	1	0	0	2	0.000
2	-1	1	0	1	0.000
3	-1	0	1	3	-0.003
4	0	0	1	1.5	0.000
5	0	1	-1	1.2	-0.001

Lần lượt thực hiện đưa các trị đo từ 1 đến 5 vào tính toán truy hồi, mỗi trị đo thực hiện biến đổi xoay k = 3 lần. Kết quả của quá trình tính bình sai truy hồi của 5 trị đo được trình bày ở các bảng sau:

Bảng 3. Ma trận phụ ban đầu $B^{(0)}$

$B^{(0)} =$	0.000001	0	0	0
	0	0.000001	0	0
	0	0	0.000001	0
	1.414214	0	0	0

Bảng 4. Ma trận phụ biến đổi cuối cùng $\overline{B}_3$

$\overline{B}_3 =$	2.449490	-0.408248	-1.224745	-0.003674
	0.000000	1.425950	-1.192188	-0.000210
	0.000000	0.000000	1.666940	0.001829
	0.000000	0.000000	0.000000	0.002304

Bảng 5. Ma trận tam giác được biến đổi cuối cùng $\overline{T}$

$\overline{T} =$	2.449490	-0.408248	-1.224745
	0.000000	1.425950	-1.192188
	0.000000	0.000000	1.666940

Vectơ các số hạng tự do được biến đổi

$$\overline{L} = \left(-0.003674 \quad -0.000210 \quad 0.001829\right)^T$$

Nghiệm của bài toán được xác định theo công thức sau:

$$\delta X = \overline{T}^{-1}.\overline{L} = \left(-0.0008 \quad 0.0008 \quad 0.0011\right)^T (m)$$

Kết quả sau bình sai được thống kê ở bảng 6.

Bảng 6. Kết quả sau bình sai

Tên điểm	Độ cao gần đúng (m)	Số hiệu chỉnh (m)	Độ cao sau bình sai (m)	Độ chính xác (m)
1	13.9350	-0.0008	13.9342	0.0014
2	19.2860	0.0008	19.2868	0.0021
3	16.8530	0.0011	16.8541	0.0014

4. Kết luận

- So sánh kết quả sau bình sai từ bảng 6 với kết quả bình sai theo thuật toán Q được trình bày trong tài liệu [6], thấy rằng hai phương pháp (thuật toán T thuận và thuật toán Q) cho kết quả như nhau.

- Khi mạng lưới có nhu cầu phát triển mở rộng, nghĩa là bổ sung các điểm mới. Lúc này, chúng ta hoàn toàn có thể sử dụng các trị đo mới cùng với các trị đo cũ để bình sai lại toàn bộ mạng lưới. Tuy nhiên, cách làm này sẽ làm thay đổi giá trị (tọa độ, độ cao) của các điểm khống chế ở giai đoạn trước - điều này không phù hợp với quy định về đo đạc. Do vậy, vấn đề đặt ra, hoàn toàn có thể sử dụng các kết quả bình sai của mạng lưới ở giai đoạn trước được lưu dữ trong CSDL kết hợp với các trị đo mới để tiến hành bình sai xác định các điểm thuộc mạng lưới mở rộng. Vấn đề này cần tiếp tục được nghiên cứu.

TÀI LIỆU THAM KHẢO

[1]. Ninh Thị Kim Anh, Trần Thị Thu Trang (2011). *Giáo trình lý thuyết sai số*. Trường Đại học Tài nguyên và Môi trường Hà Nội, Hà Nội.

[2]. Lê Anh Cường (2013). *Nghiên cứu ứng dụng phương pháp bình sai truy hồi trong xử lý số liệu lưới trắc địa*. Tạp chí Khoa học Tài nguyên và Môi trường. Số 01, trg 48 - 53;

[3]. Bùi Đăng Quang (2012). *Nghiên cứu hoàn thiện các phương pháp xử lý toán học trị đo bổ sung trong các mạng lưới trắc địa quốc gia*. Luận án tiến sĩ kỹ thuật. Trường Đại học Mỏ - Địa chất, Hà Nội.

[4]. Hà Minh Hòa (2013). *Phương pháp bình sai truy hồi với phép biến đổi xoay*. Nhà xuất bản Khoa học và kỹ thuật, Hà Nội.

[5]. Bùi Thị Hồng Thắm (2009). *Nghiên cứu áp dụng phương pháp bình sai lặp để tìm kiếm các trị đo thô*. Tạp chí Khoa học Đo đạc và Bản đồ. Số 1, trg. 37- 41;

[6]. Lương Thanh Thạch, Phạm Trần Kiên (2017). *Ứng dụng phương pháp bình sai truy hồi trong xử lý toán học trắc địa*. Tạp chí Khoa học Tài nguyên và Môi trường. Số 15, trg 10 - 13.

BBT nhận bài: 12/3/2018, Phản biện xong: 03/5/2018